Příklad: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Vyšetřete $\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$ (příp. na podmn.)

1. KROK: Bodová konvergence.

Pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje?

Víme $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{u_n(x)} = e^x$.

Bodově ANO.

---

2. KROK: $\sum u_n(x) \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$?

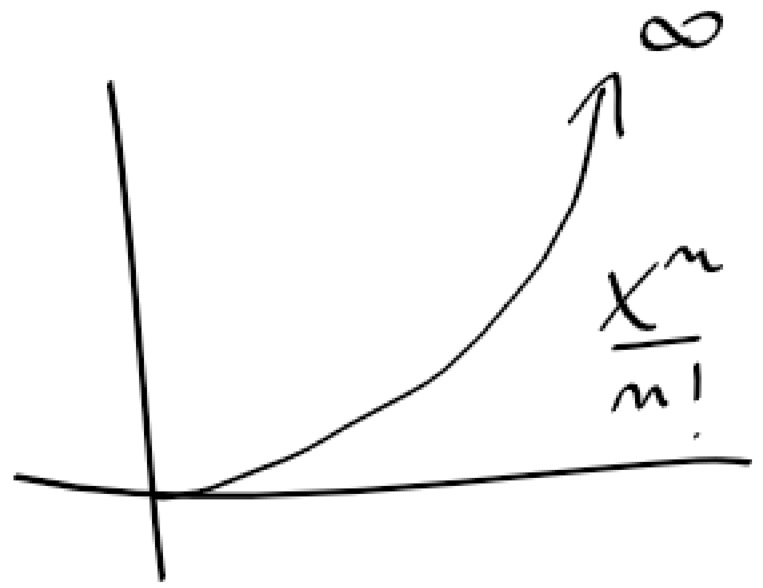
Připomeň: W. KR: Pokud $|u_n(x)| \leq a_n,\ x \in \mathbb{R}$

a $\sum a_n$ K $\boxed{\Longrightarrow}$ $\sum u_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$.

Vezmeme $a_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x)|$;

pak jistě $\forall x \in \mathbb{R}$: $|u_n(x)| \leq a_n$.

$$a_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \infty$$



$\sum a_n$ nekonverguje.

V81: $\sum u_n \rightrightarrows \Longrightarrow u_n \rightrightarrows 0$.

Tj. $u_n \not\rightrightarrows 0 \Longrightarrow \sum u_n \not\rightrightarrows$.

Podle Lemmatu o σ_n:

$$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x) - 0| = \sup |u_n(x)| = a_n = \infty$$

$\sigma_n = \infty$, $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\sigma_n \not\to 0$

$\overset{\text{L. o } \sigma_n}{\Longleftrightarrow}$ $u_n \not\rightrightarrows 0$ $\overset{\text{V81}}{\Longrightarrow}$ $\sum u_n \not\rightrightarrows$.

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \not\rightrightarrows e^x$ na $\mathbb{R}$.

Platí ovšem tzv. lokálně stejnoměrná konvergence na $\mathbb{R}$ $\left(\sum u_n \overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } \mathbb{R} \right)$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\overset{\text{platí}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall k: \sum u_n \rightrightarrows$ na $[-k,k]$.

Budiž dáno lib. $k>0$.

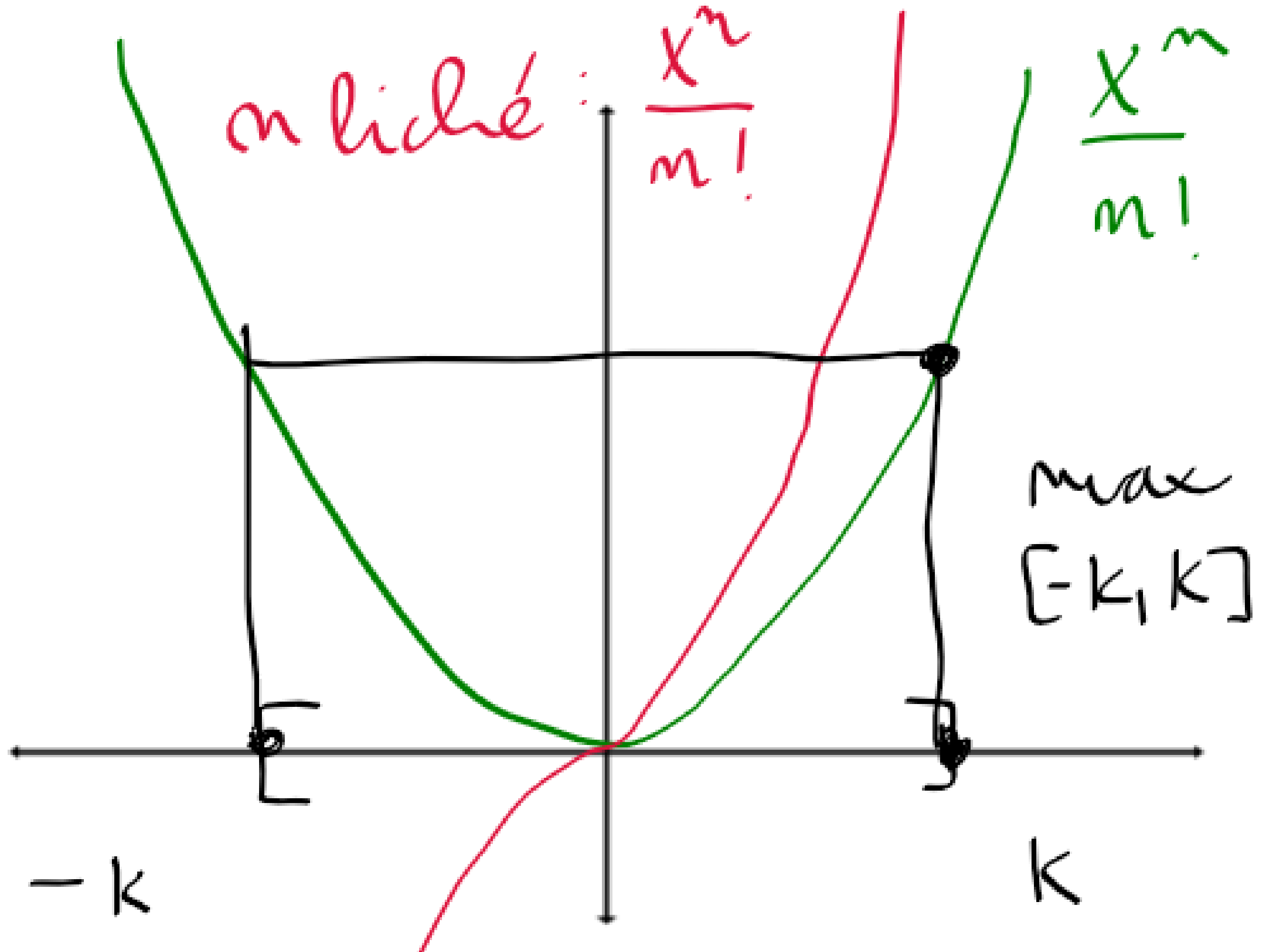
Chceme: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightrightarrows$ na $[-k,k]$.

W.KR.: $a_n := \sup_{x\in[-k,k]} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{k^n}{n!}$

rostoucí na $[0,k]$, (sudá v lichá).

Chceme: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

[Pokud ano, $\sum u_n \rightrightarrows$ na $[-k,k]$.]



$\max_{[-k,k]} \frac{k^n}{n!}$

$\sum \frac{k^n}{n!}$ K. podle podílového kr.:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{k^n}{n!}} = \lim \frac{k}{n+1} \to 0$$

$\Longrightarrow \sum$ K.

$\overset{\text{W.KR}}{\Longrightarrow} \sum \frac{x^n}{n!} \rightrightarrows$ na $[-k,k]$.

Příklad: Víme:

$$\underbrace{\sin x}_{\text{omezená}} = \underbrace{x}_{} - \underbrace{\frac{x^3}{3!}}_{} + \underbrace{\frac{x^5}{5!}}_{} - \underbrace{\frac{x^7}{7!}}_{} + \underbrace{\dots}_{}$$

omezená

neomezená na $\mathbb{R}$

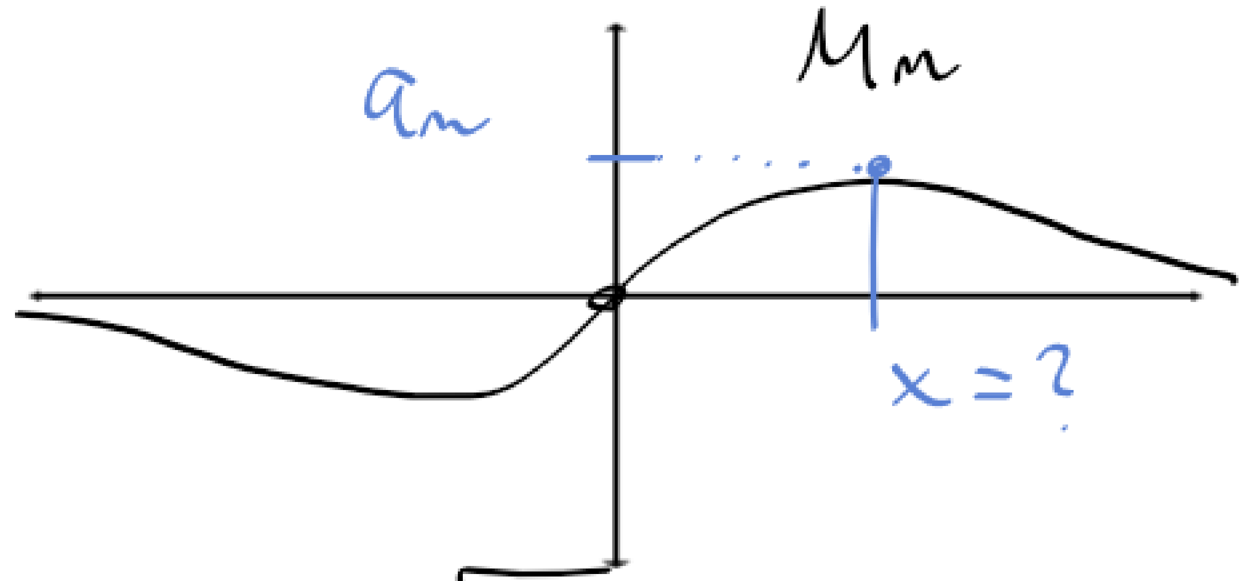
Víme (T76): $\rightrightarrows$ zachovává neomezenost.

Tedy nejde o $\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$.

Cv.: Tato řada $\rightrightarrows$ na $\boxed{[-k, k]}$ pro libovolné $k>0$.

[Z404] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ na $\mathbb{R}$

WKR:



$$a_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{nx}{1+n^5x^2} = \frac{n\cdot\sqrt{\frac{1}{n^5}}}{1+n^5\cdot\frac{1}{n^5}} = \frac{1}{2n^{3/2}}$$

$$u_n'(x) = \frac{n\cdot(1+n^5x^2) - nx\cdot n^5\cdot 2x}{(1+n^5x^2)^2} = 0 \iff$$

$$\iff 1+n^5x^2 = 2n^5x^2 \iff n^5x^2 = 1$$

$$\iff x^2 = \frac{1}{n^5} \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{n^5}}$$

$x\in[0,\infty)$: $x = \sqrt{\frac{1}{n^5}}$ ... zřejmě bod maxima

---

Závěr: $\sum a_n = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n^{3/2}} < \infty \overset{\text{W.KR}}{\Longrightarrow} \sum u_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$

[7401] $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ na $(0,\infty)$.

1. KROK: Bodová limita: Pevné x:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{x+\frac{1}{n} - x}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lim(x+\frac{1}{n})}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} =: f(x).$$

2. KROK: $f_n \rightrightarrows f$: n je pevné

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| =$$

$$= \sup_{x\in(0,\infty)} \left|\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \sup_{x\in(0,\infty)}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}\right)$$

$$\sup \frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)} = \sup\frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)} =$$

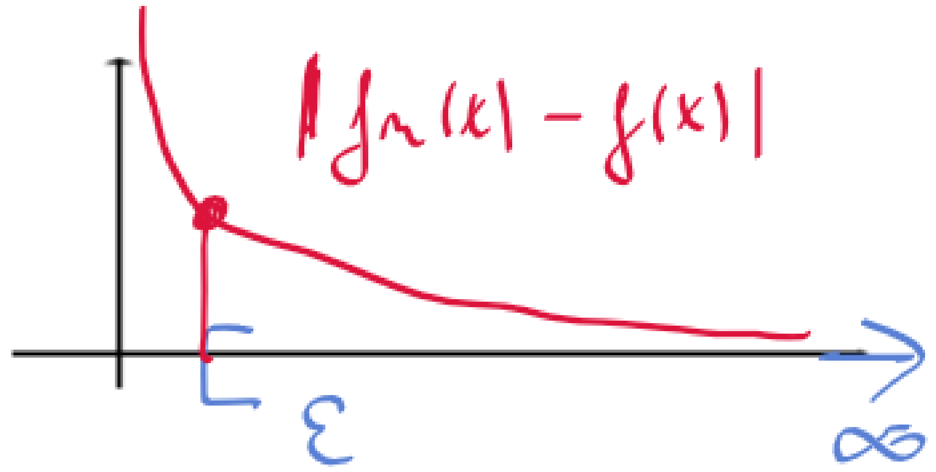
$$= \sup \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2}$$

rostoucí funkce na $(0,\infty)$

„$\frac{1}{0_+}$" $= \infty$. Tj. $\forall n\in\mathbb{N}: \sigma_n = \infty$.

Závěr: Protože $\lim_{n\to\infty}\sigma_n \neq 0 \xRightarrow{\text{LO}\sigma_n}$

$f_n \not\rightrightarrows f$ na $(0,\infty)$.



Pozorování: „Problém" je v 0. Zkusíme na intervalu $[\varepsilon,\infty)$ (pro libovolně malé $\varepsilon>0$). Tým: $\sigma_n = \sup_{x\in[\varepsilon,\infty)}|f_n(x)-f(x)|$

DOSAĎ ε za x

$$= \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon+\frac{1}{n}}\right)^2} = \sigma_n$$

pro interval $[\varepsilon, \infty)$.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\underbrace{2\sqrt{\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon+\frac{1}{n}}\right)^2}} = \frac{0}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} = 0$$

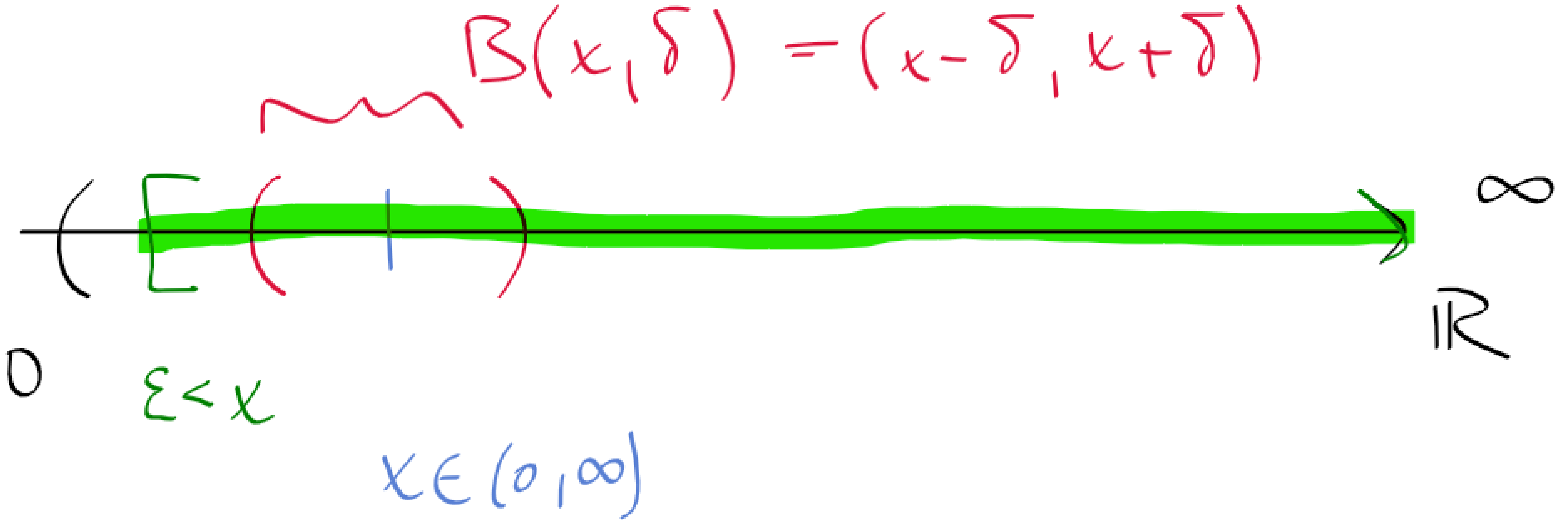
$\longrightarrow 2\sqrt{\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = 8\varepsilon\sqrt{\varepsilon} > 0$

Závěr: Podle LOσ_n (protože $\sigma_n \to 0$)

$f_n \rightrightarrows f$ na $[\varepsilon, \infty)$.

Opět tedy případ lokálně stejn. k.:

$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(0, \infty)$.



na $[\varepsilon, \infty)$ konverguje $\rightrightarrows$

Tedy i na $B(x,\delta) \subset [\varepsilon, \infty)$.

Nefungovalo by okolí $(0, 2x)$ bodu x.

na tomto intervalu totiž

$f_n \not\rightrightarrows f$.